

Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

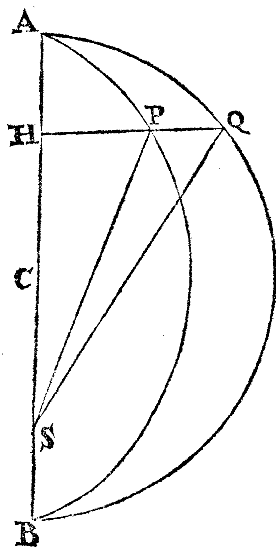
I. *Problematis* Kepleriani, *de inveniendo vero Motu Planetarum, areas tempori proportionales in Orbibus Ellipticis circa Focorum alterum describentium, Solutio* Newtoniana ; à D. J. Keill, *Astr. Prof. Savil.* Oxon. *& R. S. S. demonstrata & exemplis illustrata.*

KEPLERUS primus demonstravit, Planetas non in Orbibus Circularibus, sed Ellipticis, deferri ; Solemq; in Ellipseos focorum uno situm ea ratione circumire, ut Radius à Planeta ad Solis centrum protensus, semper verrat Areas Ellipticas, quæ temporibus quibus describuntur sunt proportionales.

Divinum hoc sagacissimi *Kepleri* Inventum, exactissimis *Tychonis Brahe* Observationibus debetur ; & tanto magis est suspiciendum, quòd illius ope, Universale motuum leges, totiusq; Mundani Systematis Philosophiam felicissime patefecerit Dominus *Newtonus*.

Cum itaq; tali lege moveantur circa Solem Planetæ, quo ipsorum loca in proprijs Orbitis ad datum tempus determinentur, necesse est ut solvetur Problema quod sequitur.

Invenire Positionem rectæ, quæ per datæ Ellipseos focum alterutrum transiens, abscindat Aream motu suo descriptam, quæ sit ad Aream totius Ellipseos in ratione data.



Sit nempe Ellipsis A P B, cujus focus alteruter S. Invenienda est positio rectæ S P, quæ abscindat Aream trilineam A S P, ad quam Area totius Ellipseos eandem rationem habet, quam tempus Periodicum Planetæ Ellipsim describentis, ad aliud tempus datum; quâ inventâ dabitur punctum P ubi planeta ad tempus illud datum versatur. Vel sit A Q B semicirculus supra Ellipseos axem majorem descriptus, ducenda est per S recta S Q abscindens Aream A S Q, ad quam Area totius circuli est in eadem ratione: si enim ex Q demittatur in Axem perpendicularis Q H, Ellipsi occurrens in P, ducta S P dabit Aream Ellipticam quæsitam; & punctum P erit locus Planetæ ad datum tempus. Est enim semisegmentum Ellipticum A P H ad semisegmentum circulare A Q H, ut H P ad H Q, hoc est, ut area totius Ellipseos ad aream totius Circuli; sed est triangulum S P H ad triangulum S Q H in eadem ratione P H ad Q H: Adeoq; Area ASP est ad Aream totius Ellipseos, ut area A S Q ad aream totius Circuli. Unde si habeatur methodus secandi in datâ ratione Aream circuli, rectâ ductâ per datum punctum S, facile erit hac ipsa ratione secare Aream Ellipticam.

Ipsi

Ipsi *Keplero*, qui primus Problema proposuit, nulla innotuit Methodus directa computandi locum Planetæ ex dato tempore; sed illi necesse fuit, per singulos gradus semicirculi A Q B progrediendo, ex dato arcu A Q, quam vocat Anomaliam Excentri, tam tempus per aream A S Q, quæ Anomaliæ mediæ est proportionalis, quam angulum A S P, hoc est locum Planetæ, seu Anomaliam coæquatam huic tempori respondentem, calculo eruere.

Cum itaq; difficilis fuit hujus Problematis solutio, Astronomi ad alias transiverant Hypotheses, fingendo punctum aliquod circa quod motus foret æquabilis, seu tempori proportionalis, & exinde datâ Anomaliâ mediâ, coæquatam determinabant. Sed computus hisce hypothesibus innixus, observationibus non congruere deprehensus est: Itaq; Geometræ varias adhibuerunt approximationes, quibus ex datâ Areâ A S Q tempori Analogâ, angulus A S P, hoc est Planetæ locus, quam proxime eliciatur. At horum omnium facillima, & ad Praxim maxime expedita, mihi videtur esse illa methodus quam tradit Dominus *Newtonus* in *Principiis*, *pag*. 111 & 112. *Edit*. 1*mæ*. quæ fere similis est ei, qua ex æquationibus affectis extrahunt Radicem Analystæ; & quidem tanto magis est æstimanda, quod non solum exhibeat Planetarum loca, quorum orbitæ ad Circuli formam proxime accedunt, sed eadem fere facilitate inservit etiam Cometis, qui in orbitis maxime excentricis moveantur.

Hanc itaque methodum in gratiam Artificum, qui Tabulas Astronomicas secundum veras motuum leges, & non ex fictis hypothesibus condere volunt, hic exponendam duxi.

Sit itaq; A Q B semicirculus supra Axem majorem Ellipseos descriptus, cujus centrum C, & focus in quo Sol locatur sit S. Ducatur C Q, in quam (si opus sit) productam cadat perpendicularis S F. Est Area A S Q = sectori A C Q + Triang. C S Q = $\frac{1}{2}$ CQ × A Q + $\frac{1}{2}$ C Q × S F; adeoq; ob datam $\frac{1}{2}$ C Q erit Area A S Q semper

 pro-

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.

proportionalis arcui A Q + recta S F, cum scil. motus sit ab Aphelio versus Perihelium: at cum à Perihelio ad Aphelion tendit Planeta, ut in Figura quarta, fit Area B S Q = sectori B C Q — Triang. C S Q, adeoq; erit illa proportionalis arcui B Q — recta S F. Hinc si capiatur Arcus A N in Fig. 2. & 3. & B N in Fig. 4. temporibus proportionalis, erit A Q + S F = A N, & B Q — S F = B N: unde S F erit = Q N, modo arcus A N vel B N sint proportionales temporibus quibus describuntur areæ A S Q vel B S Q. Ut vero inveniatur in gradibus eorumque partibus mensura arcûs in peripheria A Q B, qui sit æqualis rectæ S F, Fiat ut C Q ad C S ita arcus graduum 57,29578 (qui æqualis est C Q radio) ad arcum quartum, qui æqualis erit C S. Sit arcus ille B. Est autem C S ad S F ut Radius ad sinum anguli S C F vel A C Q. Fiat itaq; ut Radius ad sinum anguli A C Q vel arcûs A Q, ita arcus B ad alium D; erit arcus ille D æqualis rectæ S F, adeoq; si, ad datum tempus, Area A S Q esset tempori proportionalis, esset Arcus D = N Q: & capiendo arcum N P = D, punctum P caderet in Q. Si vero Area A S Q non exacte tempori respondeat, punctum P cadet supra vel infra Q, prout Area A S Q major sit vel minor verâ Areâ quæ tempori respondeat. Sit ea A S q & in C q cadat perpendicularis S H: erit per hactenus demonstrata S H = N q. At est S F = N P, unde erit S H — S F vel S F — S H, hoc est fere H E = q P = Q P — Q q vel = Q q — Q P: Et si angulus Q C q sit parvus, erit C H : C Q : : H E : Q q : : Q P — Q q : Q q, unde C Q + C H : C Q : : Q P : Q q, cum arcus A Q est quadrante minor. At cum is est quadrante major, erit C Q — C H : C Q : : Q P : Q q. Et similiter cum arcus B Q est quadrante minor, erit C Q — C H : C Q : : Q P : Q q.

Si angulus A C Q vel B C Q parvus sit, h. e. si Planeta prope Apsides versetur, erit ut C A $\pm$ C S : C A : : Q P : Q q.

Fiat

Fiat ut C S ad CQ ita Radius R ad longitudinem quandam L, erit $CQ = \frac{CS \times L.}{R}$. Eſt vero Radius ad coſinum anguli A C Q ut SC ad CF vel CH (ſunt enim CH & CF fere æquales) quare erit $CH = \frac{SC \times cos. ACQ}{R}$, adeoq; QP: $Qq :: \frac{CS \times L + CS \times cos.\ ACQ}{R} : \frac{CS \times L}{R} :: L + cos.\ ACQ : L$, cum arcus A Q ſit quadrante minor. At ſi A Q ſit quadrante major, erit QP : Qq :: L — *coſin.* A C Q : L.

Atque hac ratione ſi capiatur utcunq; arcus A Q, qui aliquantiſper minor ſit aut major vero, invenietur exinde arcus Qq huic addendus aut demendus, qui facit ut Area A S q ſit quam proxime tempori proportionalis. Et ſi loco A Q capiatur arcus A q, & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, invenietur alius A q, qui ſimiliter eundem repetendo proceſſum dabit alium A q, atq; ſic quantumvis proxime ad veritatem accedere licebit.

Invento angulo A C q, facile habebitur angulus A S q, cum in triang. q C S dentur latera C q & C S & angulus q C S. Dabitur exinde angulus C S q cujus tangens diminuendus eſt in ratione axis minoris Ellipſeos ad majorem, ut tandem habeatur tangens anguli A S P. Vel ſic forte facilius inveſtigatur angulus A S P. Sit F numerus qui exprimit longitudinem C S in partibus qualium C Q eſt 100000 : a puncto q ad axem demittatur perpendicularis q r, qui erit ſinus arcus dati A q, & erit C r ejuſdem coſinus & S r = ſummæ vel differentiæ rectarum C r, C S, hoc eſt S r = F $\pm$ coſin. A C q : adeoq; in rectangulo triangulo r S q, datis S r, r q, invenietur angulus r S q. Hinc ſi in unam ſummam addantur ſinus Log. ang. A C q, complementum Arithmeticum Logarithmi S r, & Logarithmus rationis axis minoris Ellipſeos ad majorem dabitur Tangens anguli A S P.

Tanta

Tanta autem est hujus methodi facilitas ut ea exemplis magis quam ulteriori explicatione indigeat; adeoq; licebit eam in motibus Planetæ Martis experiri, in cujus orbita, secundum Tabulas *Carolinas*, Excentricitas est ad distantiam mediam ut 14100 ad 152369, adeoque Logarithmus arcus B, qui æqualis est rectæ S C, erit 0,7244451. Erit etiam in hoc exemplo L partium 1080631 qualium Radius est 100000: Inveniendus sit angulus A C Q cum motus medius, seu arcus tempori proportionalis ab Aphelio computatus, sit unius Gradus. Quoniam C S sit hic fere pars decima ipsius C A, pono Arcum A Q esse 0,9 grad. decima scil parte minorem motu medio. Addatur sinus Logarithmicus arcus A Q ad Log. B, & fit summa 8,9205471 = Log. numeri 0. 083281 qui numerus exprimit arcum æqualem rectæ S F = N P. Et si arcus A Q esset recte assumptus, foret AN—NP = AQ, & Q P = 0. At hic est Q P = 0, 016719, a quo si auferatur ejus pars undecima, cum A S superat A C undecima circiter ipsius parte, restabit Q q = 0,0152; qui additus ad A Q dat A q = 0.9152, qui ne millesima gradus parte a vero A q differt. Sit secundò Arcus A N seu motus medius = 2 gr. Pono A Q = 1,83 prioris A q fere duplum, & ad ejus sinum Log. addatur Log. B: erit summa 9. 2286997 = Log. numeri 0,16931, unde erit Q P 0,00069; a quo si subducatur ejus pars undecima, fit Q q = 0,00063, & A q = 1,83063, qui ne decies millesima gradus parte a vero A q discrepat. Eodem modo sit motus medius seu arcus tempori proportionalis grad. 3. Fiat arcus A Q 2,745 = 1,83 + 0,915, & ad ejus sinum Log. addendo Log. B, habebitur Log. numeri 0,25392 = NP, & A N — NP = 2,74608, adeoq; Q P = 0,00108, unde Q q fere = 0,001 & A q = 2,746. Sic unica duorum Logarithmorum additione invenietur arcus A q, qui erit verus ad gradus partes millesimas.

Si jam non gradatim sed per saltum pergendo, inveniendus sit angulus A C q, cum motus medius est grad. 45. Pono arcum A Q esse graduum 40, & ad sinum ejus Logarith-

garith-

garithmicum addendo Log. B fit ſumma 0.5325125 = Log.numeri 3,4081; qui numerus à 45 ſubductus relinquit A N — N P = 41,5919, cujus exceſſus ſupra arcum A Q eſt 1,5919. Unde ſi fiat ut L + coſ. A C Q ad L ita 1,5919 ad alium, invenietur arcus Q q eſſe graduum 1.4865, adeoq; A q = 41,4865, qui non multum ſupra milleſimam gradus partem à vero differt. Verum abſq; hac proportione inveniri poteſt A q, capiendo novum arcum A Q, qui ſit aliquantulum minor quam A N — N P, eidem tamen fere æqualis; ſcil. ſit A Q = 41.50, & addendo Log. datum B ad ejus ſinum Log. habebitur alter N P = 3. 5531, qui ab AN ſubductus dat 41,4869 pro novo A q: & hic arcus minore labore eruitur, & aliquanto propius ad verum accedit quam prior A q.

Poſt inventum A q correſpondentem motui medio 45°, rurſus gradatim pergendo, unica duorum Logarithmorum additione, habebitur A q, ad omnes motus medij gradus ſubſequentes. Nempe cum motus medius ſit grad. 46, pono A Q = 42,40. & addendo ejus ſinum Log. ad conſtantem B, fiet A N — N P = 42,4249; cui arcui ſi novus AQ æqualis ponatur, habebitur A q, qui ne milleſima gradus parte à vero A q diſcrepabit. Sic cum motus medius ſit 47°, pono A Q = 43,36 = priori A q + incremento iſtius arcus pro uno gradu motus medij, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B, fit ſumma = Log. numeri 3,6402, qui ab A N ſubductus relinquit A N — N P = 43,3598 = novo A q, qui circiter gradus parte decies milleſima á vero A q diſcrepat.

Si omiſſis gradibus intermedijs inveniendus eſſet arcus A q, cum motus medius ſit gr. 100. Pono A Q grad. 96, & addendo ejus ſinum Log. ad Log. B. fit ſumma = Log. numeri 5,273 unde, A N — N P = 94,727. Itaque pono ſecundo A Q = 94.72 & addendo ejus ſinum ad Log. B, habebitur Log. numeri 5,285, qui ab A N ſubductus dat A N — N P = 94,715 = A q quam proxime. Similiter ſi motus medius ſit grad. 101, pono A Q eſſe 95,71,

cujus finus Log. ad Log. B additus dat Log. numeri 5,2756; quo numero ab 101 sublato, restabit A N — N P = 95, 7244 = A q. Atq; hac ratione, dato motu medio, si gradatim fiat processus, habebitur angulus ad centrum per unicam tantum duorum Logarithmorum additionem; quorum unus, qui constans est, in charta seorsim servandus, quo labori sæpius eundem exscribendi parcatur.

Transeamus jam ad Orbitam alterius speciei, talem nempe ut distantia Aphelij sit ad distantiam Perihelij ut 70 ad 1; qualis fere est istius Cometæ Orbita quem Periodum suam annis $75\frac{1}{2}$ complere primus deprehendit Sagacissimus Astronomus & Geometra D. *Edmundus Halleius*, Geometriæ Professor *Savilianus*. In hac Orbita erit A C vel C Q partium 35,5, & C S 34.5 qualium S B est una. Et inveniendus est arcus Bq, cum motus medius est gradus pars centesima. Quoniam media distantia trigesies & quinquies circiter superat distantiam minimam, pono B Q = 0,35, cum motus medius est 0,01. In hac Orbita invenitur constans Log. B = 1.7457133. Hic itaq; Log. ad sinum Log. arcus 0,35 additus dat Log. numeri 0,34013, qui ad arcum 0,01 additus erit = 0,35013. Si hæc summa esset æqualis 0,35, arcus B Q esset recte assumptus: sed differentia est 0,00013. Unde quoniam C B est ad S B ut 35,5 ad 1, multiplicetur differentia 0,00013 per 35,5, & prodibit Q q = 0,004615; unde erit arcus B q = 0,354615, qui vix per partes tres decies-millesimas a vero discrepat.

Sit secundo motus medius 0,02, & ponatur B Q esse 0,71. Ad ejus sinum Log. addendo Log. B, fit summa = Log. numeri 0,68998, unde B N + N P = 0,70998, adeoq; arcus assumptus B Q = 0,71 nimius fuit: & est differentia = 0,00002, quæ si per 35,5 multiplicetur & productus a B Q subducatur, restabit B q = 0,7092, vix gradus parte decies-millesima à vero aberrans.

Sit motus medius 0,03. Ponatur BQ esse 1°,06: addendo ejus Log. sin, ad Log. B, fit summa = Log. numeri 1,03008,

cui si addatur B N = 0,03, fit summa 1,06008, qui numerus major est quam B Q; quare si differentia 0,00008 per 35,5 multiplicetur & ad B Q addatur, erit B q = 1,06284. Similiter cum motus medius sit 0,04, pono B Q = 1°,40 & invenio N P = 1,3604; ad quem numerum addendo B N = 0,04 fit summa = 1,4004 qui superat 1,40 per 0,0004. Multiplicetur hæc differentia per 35,5 & productus 0,01420 erit æqualis Q q, unde B q = 1,41420. In hisce omnibus errores sunt admodum exigui, & raro millesimam gradus partem transcurrentes.

Inveniendus sit jam arcus B q, cum motus medius sit æqualis uni gradui. Pono B Q = 20°, & addendo ejus sinum Log. ad Log. B, habebitur Log. numeri 19,045; cui addendo B N = 1°, summa 20,045 superat 20 per ,045: Et cum in hoc casu L — cosin B Q est ad L ut 1 ad 11.5 fere, multiplico differentiam ,045 per 11,5, & productus ,5175 ad B Q additus facit 20,5175. Pono igitur secundo B Q = 20,51, & prodibit, similiter ut in præcedentibus, N P = 19.5092; cui addendo B N fit summa 20,5092, quæ minor est quam B Q: unde si differentia 0,0008 multiplicetur per 11,5, & productus 0,0092 substrahatur a B Q, restabit B q = 20,5008.

Sit deniq; motus medius æqualis duobus grad. Pono B Q grad. 30, & invenitur N P = 27,84, cui addendo gradus duos, summa 29.84 minor est quam 30; & si multiplicetur differentia 0,16 per 6,3 (nam L — cos. B Q est ad L ut 1 ad 6,3 ferè) fiet 1,008 = Q q; adeoq; hic arcus a B Q subductus dat B q = 28,982: Ut vero corrigatur B q, assumo secundo B Q = 29°, & simili processu invenietur B q = 28,9672.